Teorie nutná ke zvládnutí cvičení 10

Součty náhodných veličin

Jsou-li $X_1, ..., X_n$ náhodné veličiny a $a_1, ..., a_n$ reálná čísla, pak (za předpokladu, že obě strany existují)

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E} X_i$$

$$\mathrm{var}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{var} X_i + \sum\sum\nolimits_{i\neq j} a_i a_j \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

Věta (Centrální limitní věta)**.** Máme posloupnost $X_1, X_2, ...$ nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, pro které je $0 < \mathrm{var} X_1 < \infty$. Pak

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{var}X_1}} \leq x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta (Slabý zákon velkých čísel)**.** Máme posloupnost $X_1, X_2, ...$ nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s konečnou střední hodnotou $\mathbb{E}X_1 = \mu$ a konečným rozptylem. Pak

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

Věta (Věta o spojité transformaci)**.** Jestliže pro posloupnost náhodných veličin $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ a $a \in \mathbb{R}$ platí $Y_n \xrightarrow{p} a$ a g je spojitá funkce, pak

$$g(Y_n) \xrightarrow{p} g(a).$$

Přehled momentů základních rozdělení

Název	**Hodnoty**	**Rozdělení**	**Střední hodnota**	**Rozptyl**
Alternativní $Alt(p)$	$\{0,1\}$	$p_1 = p, p_0 = 1-p$	p	$p(1-p)$
Binomické $Bi(n,p)$	$\{0,\ldots,n\}$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poissonovo $Poiss(\lambda)$	$\{0,1,2,\ldots\}$	$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{\lambda}$	λ	λ
Hypergeometrické $Hg(N,K,n)$	$\{\max(0, K-N+n), ..., \min(n,K)\}$	$p_k = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{K}{N}$	$n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Rovnoměrné $R(a,b)$	$[a,b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in [a,b]$ $= 0$ jinak	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciální $Exp(\lambda)$	$[0,\infty)$	$f_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ $= 0$ jinak	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normální $N(\mu,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2